UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

SEPTIEMBRE-DICIEMBRE DE 2007
MA1116 tercer examen parcial (40%)
11-12-2007

TIPO B1

SOLUCIONES

1.- (12 ptos.) Halle la proyección ortogonal del vector **b**= (1, 3, 3) sobre el subespacio, W, de R^3 definido por W = gen { (1, 1, 2), (-2, 1, -1)]} .

Solución a.

Apliquemos el algoritmo de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal para W :
como los dos vectores $\mathbf{v}_1$= (1, 1, 2), $\mathbf{v}_2$=(-2, 1, -1) son L.I. , forman una base para W;

$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1/|\mathbf{v}_1| = \mathbf{v}_1/\sqrt{6}$;

$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2.\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = (-2, 1, -1) - [\frac{-3}{\sqrt{6}}\frac{(1, 1, 2)}{\sqrt{6}}] = \frac{3}{2}(-1, 1, 0)$;

$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2'/|\mathbf{v}_2'| = \frac{(-1,1,0)}{|(-1, 1, 0|)} = (-1, 1, 0)/\sqrt{2}$.

Los dos vectores $\mathbf{u}_1 = \frac{(1, 1, 2)}{\sqrt{6}}$, $\mathbf{u}_2 = \frac{(-1, 1, 0)}{\sqrt{2}}$, forman una base ortonormal para W; entonces :

$\text{proy}_W\, \mathbf{b} = (\mathbf{b}.\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{b}.\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 = \frac{10}{\sqrt{6}}\frac{(1, 1, 2)}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{(-1, 1, 0)}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}(1, 4, 5)$;

Solución b.

El vector **b** se puede escribir en forma única como suma **b** = **h**+**p** , siendo
$\mathbf{h} = \text{proy}_W\, \mathbf{b}$, $\mathbf{p} = \text{proy}_{W\perp}\, \mathbf{b}$;
como los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ generan un plano por el origen en R^3, el complemento ortogonal, $W^\perp$ será la rectas por el origen, paralela al vector definido por

$\det(A) = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (-3, -3, 3)$ que a su vez es paralelo al vector **q**=(1, 1, -1) ;

entonces se tiene : $\mathbf{p} = \text{proy}_{\mathbf{q}}(\mathbf{b}) = \frac{(\mathbf{b}.\mathbf{q})\,\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|^2} = \frac{1}{3}\mathbf{q}\ \frac{(1, 1,-1)}{3}$;

$\mathbf{h} = \mathbf{b} - \mathbf{p} = (1, 3, 3) - \frac{(1, 1,-1)}{3} = \frac{2}{3}(1, 4, 5)$.

SOLUCIONES tercer parcial B1

2.- (10 ptos.) Sea $T : M_{2x2} \to M_{2x2}$ tal que ;

$T(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix})= \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$, $T(\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix})= \begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$, $T(\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix})= \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $T(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix})= \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$;

2a) halle una fórmula para T ;
2b) halle la dimensión, $\nu(T)$, del núcleo de T;
2c) halle la dimensión, $\rho(T)$, de la imagen de T.

Solución.

$\mathbf{T(} \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}) = aT(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix})+b\, T(\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix})+cT(\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix})+dT(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix})=$

$=a\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}= \begin{bmatrix}a+c&b\\-b&-a+d\end{bmatrix}$ luego :

$\mathbf{T(} \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}a+c&b\\-b&-a+d\end{bmatrix}$;

2b) como $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} \in$ Núcleo de T $\Leftrightarrow \mathbf{T(} \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}a+c&b\\-b&-a+d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a+c=0\\b=0\\-a+d = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=0\\a= -c = d\end{cases}$ se tiene Núcleo(T) = $\{\begin{bmatrix}a&0\\-a&a\end{bmatrix}\}$= gen $\{\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}\}$;

por lo tanto Núcleo(T) tiene una base formada por un solo vector y su dimensión es

$\nu(T) =1$;

2c) como $\rho(T)+\nu(T) = 4$ [= dimensión del dominio] se tiene : $\rho(T) = 4-1 = 3$;

Otra manera de hallar facilmente $\rho(T)$ podría ser hallando primero la matriz asociada a la transformación lineal (con las bases naturales) :

$A = \begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix}$ y [llevándola a forma escalonada] tomar en cuenta que $\rho(T) = \dim(R_A)$:

$$\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow \rho(T) = \dim(R_A) = 3 .$$

3.- (12 ptos.) Sea $A = \begin{bmatrix}10&2&2\\2&13&4\\2&4&13\end{bmatrix}$.

Halle una matriz <u>ortogonal</u> , Q, y una matriz diagonal, D, tales que $Q^{-1}AQ = D$, conociendo que $\det\begin{bmatrix} 10-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 13-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & 13-\lambda \end{bmatrix} = (-1)\,(\lambda-9)^2(\lambda-18)$.

Solución.

Los autovalores de A son : $\lambda_1=\lambda_2=9$, $\lambda_3=18$. Hallemos los autoespacios correspondientes :

$$\lambda=9 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a-2b \\ a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow E_9 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \ ;$$

$$\lambda=18 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -8 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{R_1\to R_1+4R_2 \\ R_3\to R_3-R_2}}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -18 & 18 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{18} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \ ;$$

Como los autovectores de E_9 ya son perpendiculares a los autovectores de E_{18} , para obtener una base ortonormal de autovectores de R^3 es suficiente aplicar el algoritmo de Gram-Schmidt a los vectores de la base de E_9 y dividir por su módulo al autovector de la base de E_{18} .

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} ;\ (v_2)' = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} ;$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{45}}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} ;\ u_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} .\ \text{Por consiguiente} : P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{-5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} ;$$

$$D = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} .$$

4.- (6 ptos.) Demuestre que si λ es un autovalor de una matriz, A, de tamaño nxn, entonces λ^2 es un autovalor de A^2.

Solución.

Si λ es autovalor de A entonces existe un autovector , $\mathbf{v}$ [representado por una matriz columna] , tal que $A\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$; entonces se tiene :

$A^2\mathbf{v} = A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(A\mathbf{v}) = \lambda(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v}$ lo cual pone en evidencia que λ^2 es autovalor de A^2 , asociado al mismo autovector, $\mathbf{v}$ **.**